

2 VEDENÍ TEPLA – KONDUKCE

Vedení tepla lze sledovat v teplotním stavu:

- ustáleném = stacionárním → teplota se v určitém místě s časem nemění
- neustáleném = nestacionárním → teplota v určitém místě mění s časem

2.1 Stacionární vedení tepla

Nemá-li těleso ve všech místech stejnou teplotu, dochází k jejímu vyrovnání v důsledku kinetické energie jeho částic (molekul). Tento děj, tj. vyrovnávání teplot v tělese vzájemným působením částic (molekul), se nazývá vedení tepla.

Šíření tepla vedením se uskutečňuje především v pevných tělesech, zatímco v kapalinách a plynech pouze za jistých podmínek, např. zahřívá-li se vodorovná vrstva kapaliny nebo plynu shora. V teorii vedení tepla se však zanedbává molekulární skladba těles; tělesa se předpokládají jako spojitá prostředí.

Základní zákon vedení tepla – Fourierův zákon

Základní zákon - Fourierův zákon vedení tepla má tvar:

$$\vartheta = -\lambda \cdot \frac{dt}{dx} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-2}] \quad /1/$$

Veličina ϑ v rovnici vyjadřuje množství tepla v joulech [J] proteklého jednotkou plochy, kolmou na směr proudění za jednotku času a nazývá se hustota tepelného toku. Vzhledem k tomu, že množství tepla prošlého za jednotku času je výkon a jednotkou výkonu je watt [W] (Watt je výkon, při němž se rovnoměrně vykoná práce 1 J za 1 sekundu), lze hustotu tepelného toku vyjádřit v $[\text{W} \cdot \text{m}^{-2}]$.

Poměr dt/dx se nazývá teplotní gradient; označuje poměr přírůstku teploty dt ke vzdálenosti dx mezi izotermními plochami (izotermní plocha je geometrické místo bodů o stejné teplotě) ve směru rovnováhy - viz obr. 1:

$$\text{grad } t = \frac{dt}{dx} \quad [\text{K} \cdot \text{m}^{-1}] \quad /2/$$

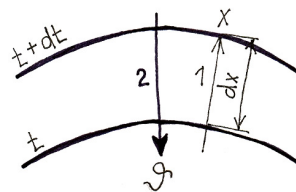
Teplotní gradient neboli teplotní růst je mírou změny teploty v daném místě; má rozměr $[\text{K} \cdot \text{m}^{-1}]$. Teplotní gradient se ve směru poklesu teploty t označuje záporným znaménkem a nazývá se teplotní spád $(-dt/dx)$. Záporné znaménko v rovnici /1/ vyplývá z toho, že tepelný tok proudí proti směru teplotního gradientu - obr. 1. Množství prošlého tepla za časovou jednotku je dáno vztahem:

$$Q = \vartheta \cdot A = \lambda \cdot \frac{dt}{dx} \cdot A \quad /3/$$

kde: A - plocha $[\text{m}^2]$

Vedení tepla jednoduchou rovinnou stěnou

Nejjednodušší případ, který se v teorii vedení tepla vyskytuje, je vedení tepla rovinnou deskou (stěnou). Teplo se vede pouze ve směru osy x - jednorozměrné teplotní pole. Jednorozměrné vedení tepla nastává u nekonečně veliké rovinné desky s konstantními teplotami povrchových ploch



Obr. 1: Náčrt k definici teplotního gradientu
1 - směr teplotního gradientu
2 - směr tepelného toku

(povrchová plocha je plochou izotermickou o určité teplotě t). Vzhledem k tomu, že součinitel tepelné vodivosti materiálu desky λ [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$] je stálý, povrchové plochy stěny jsou udržovány na stálých teplotách t_1 a t_2 , jsou izotermické plochy v jednorozměrném teplotním poli roviny kolmé k ose x (obr. 2).

Pro matematické vyjádření případu vyjdeme z Fourierova zákona [1]:

$$\vartheta = -\lambda \cdot \frac{dt}{dx} = -\lambda \cdot \left(-\frac{t_1 - t_2}{d} \right) = \lambda \cdot \frac{t_1 - t_2}{d} \quad /4/$$

Poměr λ / d [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$] se nazývá plošná tepelná vodivost označuje se:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{d} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}] \quad /5/$$

kde: λ - součinitel tepelné vodivosti [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]
 d - tloušťka konstrukce [m]

Převrácenou hodnotu plošné tepelné vodivosti je tepelný odpor konstrukce:

$$R = \frac{1}{\Lambda} = \frac{d}{\lambda} \quad [\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}] \quad /6/$$

Je to tedy poměr tloušťky konstrukce a součinitele tepelné vodivosti. Vyjádříme-li ze vztahu /4/ ϑ i pomocí tepelného odporu, dostaneme:

$$\vartheta = \frac{t_1 - t_2}{R} = \frac{\lambda}{d} \cdot (t_1 - t_2) \quad /7/$$

Množství tepla Q proteklého jednoduchou rovinnou stěnou o ploše A [m^2] za dobu τ [s] je dáno rovnicí:

$$Q = \vartheta \cdot A \cdot \tau = \frac{t_1 - t_2}{R} \cdot A \cdot \tau \quad [\text{J}] \quad /8/$$

Vedení tepla jednoduchou válcovou stěnou

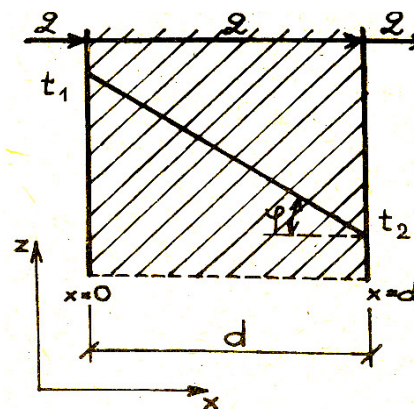
Uvažujeme válcovou trubku o délce $l = 1$ m, s vnitřním poloměrem r_1 a vnějším r_2 (obr. 3). Součinitel tepelné vodivosti λ budiž stálý. Povrchové teploty t_1 a t_2 jsou rovněž stálé, přičemž $t_1 > t_2$. Teplota se mění jen v radiálním směru, proto je teplotní pole jednorozměrné.

Vytneme si ve vzdálenosti r od osy válcovou vrstvu o tloušťce Δr . Množství tepla protékajícího touto vrstvou za časovou jednotku je podle Fourierova zákona:

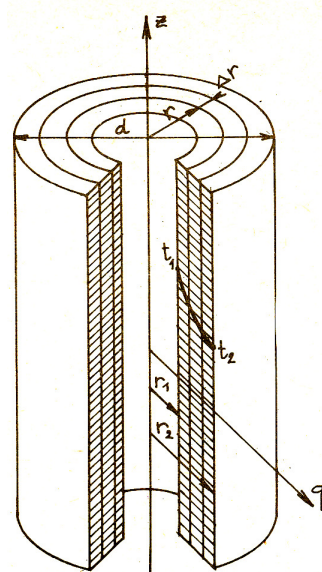
$$Q = \vartheta \cdot A = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} \cdot A = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \quad [\text{W}] \quad /9/$$

kde: $A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l$ - jednotkový povrch válce

Po matematické úpravě (odderivování) dostáváme: $t = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l} \cdot \ln r + \text{konst.}$ /10/



Obr. 2: Jednoduchá rovinná stěna



Obr. 3: Stacionární vedení tepla jednovrstvou válcovou stěnou

Dosadíme-li za t povrchovou teplotu t_1 pro $r = r_1$, resp. t_2 pro $r = r_2$, dostaneme pro rozdíl teplot dt :

$$dt = t_1 - t_2 = -\frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l} \cdot (\ln r_1 - \ln r_2) = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \quad /11/$$

Hledané množství tepla za časovou jednotku bude:

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot (t_1 - t_2) = \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \cdot (t_1 - t_2) \quad [\text{W}] \quad /12/$$

$$\text{nebo } \vartheta = \frac{2\pi \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}} \quad \text{kde } l = 1\text{m} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^2] \quad /13/$$

Jestliže podíl $d_2 / d_1 \leq 2$, považujeme válcovou stěnu za tenkostěnnou a potom bez větších chyb je možno tepelný tok zjednodušit podle vzorce:

$$\vartheta = \frac{\lambda}{d} \cdot \pi \cdot d_s \cdot (t_1 - t_2) \quad /14/$$

kde: $d_s = \frac{d_1 + d_2}{2}$ – střední průměr trubky

$$d = \frac{d_1 - d_2}{2} \quad \text{– tloušťka stěny trubky}$$

Teplotu t_r v libovolném místě r od středu trubky dostaneme dle vztahu:

$$t_r = t_1 - \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot l} \cdot \ln \frac{r}{r_1} \quad /15/$$

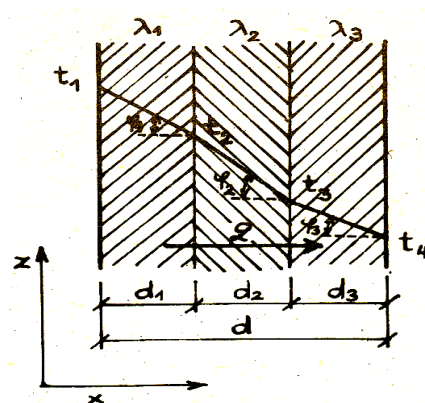
Rovnice /15/ se používá při určení povrchových teplot potrubí různých válcových zařízení a požárního nebezpečí. Teplota uvnitř válcové stěny se mění podle zákona logaritmické křivky.

Vedení tepla složenou rovinnou stěnou

Pro určení tepelného toku složené rovinné stěny se vychází z vedení tepla jednoduchou rovinnou stěnou. Příkladem složení stěny jsou obezdívky kotlů, mrazíren a tepelných zařízení, která mají kromě nosných vrstev (zdivo, ohnivzdorný materiál) běžně navíc tepelnou izolaci.

Složená stěna nechť se sestává např. ze 3 různorodých vrstev (obr. 4). Součinitelé tepelné vodivosti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, povrchové teploty stěny t_1, t_4 jsou dány. Teploty styčných ploch t_2, t_3 jednotlivých vrstev nejsou známy, ale mají společnou hodnotu pro stýkající se vrstvy, za předpokladu těsného přiléhání vrstev na sebe. Při stacionárním vedení tepla stěnou je hustota tepelného toku stálá a stejná pro všechny vrstvy. Proto podle rovnice /4/ pro jednoduchou stěnu musí platit:

$$\vartheta = \frac{\lambda_1}{d_1} \cdot (t_1 - t_2) = \frac{\lambda_2}{d_2} \cdot (t_2 - t_3) = \frac{\lambda_3}{d_3} \cdot (t_3 - t_4)$$



Obr. 4: Složená rovinná stěna

Z těchto rovnic snadno stanovíme teplotní rozdíly v jednotlivých vrstvách:

$$(t_1 - t_2) = \vartheta \cdot \frac{d_1}{\lambda_1}; \quad (t_2 - t_3) = \vartheta \cdot \frac{d_2}{\lambda_2}; \quad (t_3 - t_4) = \vartheta \cdot \frac{d_3}{\lambda_3} \quad /16/$$

Součet teplotních spádů v jednotlivých vrstvách stanoví úhrnný teplotní rozdíl. Sečtením rovnic /16/ dostaneme:

$$t_1 - t_4 = \vartheta \cdot \left(\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} \right) = \vartheta \cdot (R_1 + R_2 + R_3) \quad /17/$$

Hustota tepelného toku příslušná tomuto rozdílu je dána vztahem:

$$\vartheta = \frac{t_1 - t_4}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3}} = \frac{t_1 - t_4}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{t_1 - t_4}{\sum_{i=1}^3 R_i} \quad [\text{W.m}^2] \quad /18/$$

Pro stěnu složenou z n vrstev je analogicky:

$$\vartheta = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n R_i} \quad [\text{W.m}^2] \quad /19/$$

Vedení tepla složenou válcovou stěnou

Analogicky, jako při odvozování rovnice vedení tepla vícevrstvou rovinnou stěnou, je možno odvodit rovnici vedení tepla vícevrstvou válcovou stěnou. V praxi se tento případ vyskytuje u izolovaných potrubí, válcových nádrží apod. Předpokládáme-li dokonalý styk jednotlivých vrstev, jsou povrchové teploty stýkajících se vrstev stejné pro obě sousední vrstvy. Průměry a tepelné vodivosti jednotlivých vrstev jsou naznačeny na obr. 5. Jsou dány povrchové teploty t_1 a t_4 na vnitřním a vnějším povrchu trubky. Teploty styčných ploch t_2 a t_3 nejsou známy. Při stacionárním vedení tepla je množství tepla protékající jednotlivými vrstvami stejné a konstantní. Na základě rovnice /13/ bude platit:

$$\vartheta = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}} = \frac{2\pi \cdot (t_2 - t_3)}{\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2}} = \frac{2\pi \cdot (t_3 - t_4)}{\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3}} \quad /20/$$

Z těchto rovnic lze určit změnu teploty pro každou vrstvu

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= \frac{\vartheta}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} \\ t_2 - t_3 &= \frac{\vartheta}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} \\ t_3 - t_4 &= \frac{\vartheta}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} \end{aligned} \quad /21/$$

Součet jednotlivých teplotních rozdílů stanoví celkový teplotní rozdíl.

$$t_1 - t_4 = \frac{\vartheta}{2\pi} \left(\frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3} \right) \quad /22/$$

Pro známý teplotní rozdíl $t_1 - t_4$ je možno stanovit z této rovnice množství tepla, které projde za časovou jednotku uvažovanou složenou válcovou stěnou v délce 1m.

$$\vartheta = \frac{2\pi \cdot (t_1 - t_4)}{\frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3}} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-1}] \quad /23/$$

Analogicky je pro n vrstev a délku stěny l :

$$\vartheta = \frac{2\pi \cdot l \cdot (t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} \quad /24/$$

kde: t_1 - teplota vnitřního povrchu stěny
 t_{n+1} - teplota vnějšího povrchu stěny

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} - \text{sumární tepelný odpor stěny}$$

Z rovnice /24/ vnější průměr tepelné izolace d_e vychází

$$d_e = d_i \cdot e^{\lambda_i \left(\frac{2\pi \cdot l \cdot dt}{\vartheta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right)} \quad /25/$$

kde: $dt = t_1 - t_{n+1}$ - rozdíl teplot na povrchu vícevrstvé válcové stěny
 $e = 2,718$ - základ přirozených logaritmů
 d_i - vnitřní průměr tepelné izolace
 λ - součinitel tepelné vodivosti izolace
 l - délka stěny

Hodnoty neznámých povrchových teplot jednotlivých vrstev dostaneme z rovnic /21/ a /23/.

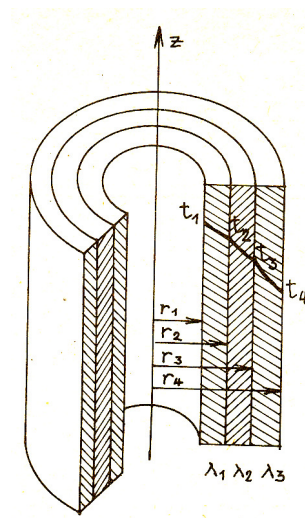
$$t_2 = t_1 - \frac{\vartheta}{2\pi \cdot l} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}$$

$$t_3 = t_2 - \frac{\vartheta}{2\pi \cdot l} \cdot \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} = t_1 - \frac{\vartheta}{2\pi \cdot l} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} \right) \quad /26/$$

Analogicky je pro n vrstev

$$t_r = t_1 - \frac{\vartheta}{2\pi \cdot l} \sum_{i=1}^x \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \quad /27/$$

kde: $\sum_{i=1}^x \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}$ - sumární tepelný odpor izolace od r_1 do r při $x = n$; $t_r = t_n + 1$

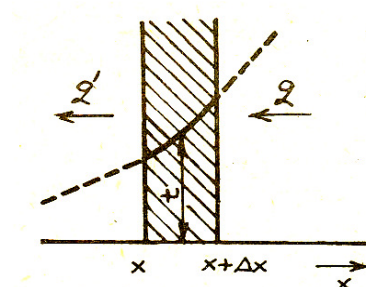
$$\ln \frac{r_{i+1}}{r_i} = \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}$$


Obr. 5: Složená válcová stěna.

2.2 Nestacionární vedení tepla

V technické praxi se často vyskytují problémy, při nichž se teplota v určitém místě uvažovaného tělesa mění s časem - nestacionární děje. V tuhém tělese, ve kterém se teplo vede pouze ve směru osy x (teplota je funkcí času a pouze jediné souřadnice x - jednorozměrné teplotní pole) se uvažují fyzikální parametry za konstanty. Průběh teploty není přímkový a z desky o tloušťce Δx vyříznuté z tělesa na obr. 6 vystupuje v místě x hustota tepelného toku q , která se obecně liší od hustoty tepelného toku vystupující na místě $x + \Delta x$ do desky. Nestacionární děje lze popsat parciální diferenciální rovnicí vedení tepla s příslušnými okrajovými podmínkami.

Vzhledem k tomu, že tato diferenciální rovnice má řešení po matematické stránce dosti náročné, v technické praxi se dříve často provádělo řešení buď pomocí diagramů pro jednotlivé případy, nebo se dávala přednost přibližným diferenčním metodám (např. Schmidtova grafická metoda). V dnešní době se využívá výpočetní techniky.



Obr. 6: Průběh teploty při nestacionárním vedení tepla

QUALITY RECORD

Název	Vedení tepla
Popis	V této kapitole se autor věnuje problematice vedení tepla, jako jednou ze složek sdílení tepla při požáru. Je zde uvedeno vedení tepla konstrukcemi obecně i na konkrétních příkladech. V závěru je stručně popsáno nestacionární vedení a poukázáno na jeho problematické části.
Kategorie	Teorie požáru
Název souboru	1-2_Vedeni_tepla.pdf
Datum vytvoření	10. 11. 2006
Autor	Ing. Marek Pokorný Katedra konstrukcí pozemních staveb, Fakulta stavební, ČVUT v Praze
Klíčová slova	Šíření tepla; Šíření požáru; Vedení tepla; Stacionární vedení tepla; Nestacionární vedení tepla; Hustota tepelného toku; Výměna tepla; Vedení tepla stěnou; Fourierův zákon.
Literatura	Kupilík, V.: Stavební konstrukce z požárního hlediska, Grada Publishing, Praha, 2006, 272 str., ISBN 80-247-1329-2 Kupilík, V.: Termodynamika, Praha 1987, 162 str., skl. č. 738, 54-005-87, TS 03/05